

## CONVECTION NATURELLE LAMINAIRE TRIDIMENSIONNELLE AUTOUR DE SURFACES

J.-L. PEUBE et D. BLAY

Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques et Thermiques, 40, avenue du Recteur Pineau—86022 Poitiers, France

(Reçu le 16 Janvier 1978)

**Résumé**—Dans le cadre de la convection naturelle tridimensionnelle, nous montrons comment à partir de l'hypothèse de prévalence de l'écoulement selon les lignes de plus grande pente, les équations de la couche limite laminaire peuvent se simplifier à celle d'un problème bidimensionnel. Nous justifions cette hypothèse dans le cas particulier du cylindre circulaire incliné, infini et isotherme, d'abord à partir de solutions numériques, puis par une visualisation des lignes de courant pariétales.

### NOMENCLATURE

$C_p$ , chaleur massique à pression constante;  
 $e_1, e_2, e_3$ , coefficients métriques associés au système de coordonnées curvilignes;  
 $f_1, f_2$ , composantes des forces volumiques;  
 $F$ , fonction de courant définie par l'équation (23);  
 $g$ , accélération de la pesanteur;  
 $Gr$ ,  $= \frac{g\beta L^3 (T_p - T_\infty)}{\nu^2}$  nombre de Grashof;  
 $K$ , facteur de forme géométrique défini par l'équation (26);  
 $L$ , longueur de référence;  
 $n$ , normale à la paroi;  
 $Pr$ ,  $= \frac{\mu C_p}{\lambda}$  nombre de Prandtl;  
 $q$ , nombre rationnel;  
 $R$ , rayon du cylindre;  
 $s$ , longueur d'arc des lignes de plus grande pente;  
 $T$ , température dimensionnelle;  
 $u_1, u_2, u_3$ , composantes dimensionnelles de la vitesse dans le système de coordonnées curvilignes;  
 $U_1, U_2$ , ordre de grandeur des composantes  $u_1$  et  $u_2$  de la vitesse;  
 $W$ , composante adimensionnelle de la vitesse selon la coordonnée  $z$ ;  
 $u$ ,  $= u_1 \frac{R}{\nu} Gr^{-1/2}$  composante adimensionnelle de la vitesse selon la coordonnée  $x$ ;  
 $v$ ,  $= v_1 \frac{R}{\nu} Gr^{-1/4}$  composante adimensionnelle de la vitesse selon la coordonnée  $y$ ;  
 $w$ ,  $= w_1 \frac{R}{\nu} \frac{Gr^{-1/2}}{tg\phi}$  composante adimensionnelle de la vitesse selon la coordonnée  $z$ ;  
 $X, Y, Z$ , coordonnées cylindriques dimensionnelles;

$x = X/R, y = Y/R, z = Z/R$ ,

coordonnées cylindriques adimensionnelles.

### Symboles grecs

$\alpha$ , angle d'une génératrice et d'une ligne de courant;  
 $\alpha'$ , angle d'une génératrice et d'une ligne de plus grande pente;  
 $\beta$ , coefficient de dilatation;  
 $\eta$ , variable d'intégration définie par l'équation (22);  
 $\theta$ , température adimensionnelle;  
 $\Theta$ , température adimensionnelle;  
 $\lambda$ , conductivité thermique;  
 $\nu$ , viscosité cinématique;  
 $\rho$ , masse volumique;  
 $\phi$ , angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale;  
 $\psi$ , fonction de courant;  
 $\xi$ , variable d'intégration définie par l'équation (21);  
 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , coordonnées curvilignes.

### Indices inférieurs

$i$ , indice de numérotation;  
 $j$ , indice de numérotation;  
 $0$ , d'ordre zéro;  
 $P$ , lié à la paroi;  
 $\infty$ , à l'infini.

### Indice supérieur

$\bar{\phantom{x}}$ , caractérise une variable ayant subi la transformation de Mangler généralisée.

### I. INTRODUCTION

LA RÉOLUTION des équations de la couche limite en convection naturelle laminaire tridimensionnelle n'a donné cours jusqu'alors qu'à peu de résultats. Savage [1] définit certaines géométries particulières pour lesquelles les équations possèdent des solutions affines. Stewart [2] en utilisant une méthode intégrale dans le

cas des grands nombres de Prandtl, traite de l'influence de la forme de la géométrie et de l'inclinaison du corps étudié sur le coefficient de transfert.

Ici, nous exposons une méthode permettant de ramener l'étude des problèmes de convection naturelle autour d'une large classe de surfaces à celle de problèmes bidimensionnels et nous la justifions pour la géométrie particulière du cylindre circulaire incliné.

## II. RESULTATS THEORIQUES

### II.1.

L'étude des systèmes physiques où interviennent des surfaces quelconques nécessite en général l'emploi de coordonnées curvilignes orthonormées de manière que les frontières du problème soient des surfaces de coordonnées. Soit  $0x_1x_2x_3$  un trièdre orthogonal quelconque. Les équations:

$$\begin{aligned}\xi_1(x_1, x_2, x_3) &= \text{constante} \\ \xi_2(x_1, x_2, x_3) &= \text{constante} \\ \xi_3(x_1, x_2, x_3) &= \text{constante}\end{aligned}$$

représentent les équations de familles de surfaces caractérisant le système de coordonnées curvilignes.

Les coefficients métriques associés sont définis par:

$$e_i^2 = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \right)^2 \quad i = 1, 2, 3.$$

En prenant comme surface de coordonnées la surface du corps considéré et comme troisième coordonnée  $\xi_3$ , la distance à cette surface, ce qui implique que  $e_3 = 1$ , les équations de la couche limite de la convection naturelle stationnaire laminaire pour un fluide à propriétés physiques constantes soumis à un champ de forces quelconque s'écrivent [3]:

Equations de quantité de mouvement:

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{e_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{e_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{u_1 u_2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2} \\ - \frac{u_2^2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_2}{\partial \xi_1} = f_1 + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_3^2}\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{e_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{e_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{u_1 u_2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_2}{\partial \xi_1} \\ - \frac{u_1^2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2} = f_2 + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_3^2}\end{aligned} \quad (2)$$

Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (e_2 u_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (e_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (e_1 e_2 u_3) = 0. \quad (3)$$

Equation de l'énergie:

$$\frac{u_1}{e_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{e_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} + u_3 \frac{\partial T}{\partial \xi_3} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_3^2}. \quad (4)$$

Conditions aux limites:

$$\begin{aligned}\xi_3 = 0, \quad T = T_p(\xi_1, \xi_2), \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0 \\ \xi_3 \rightarrow \infty, \quad T = T_\infty, \quad u_1 = u_2 = 0.\end{aligned}$$

### II.2. Hypothèse de prévalence de l'écoulement selon les lignes de plus grande pente

Le mouvement d'une particule fluide en convection

naturelle a lieu sous l'action des forces de pesanteur sans autre donnée de vitesse extérieure. Cette remarque nous conduit à prendre pour lignes de coordonnées les courbes tangentes à la direction de la projection des lignes de force sur la surface, "lignes de plus grande pente",  $(\xi_1)$  et leur trajectoire orthogonale  $(\xi_2)$ . Dans ces conditions l'équation (2) ne comporte pas de terme de force extérieure ( $f_2 = 0$ ). Le seul terme de l'équation (2) pouvant créer ou entretenir une composante transversale  $u_2$  de la vitesse dans ce système de coordonnées est:

$$\frac{u_1^2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2}.$$

Lorsque celui-ci est négligeable, l'équation (2) admet pour solution approchée  $u_2 = 0$ . Nous avons déterminé un critère concernant ce cas à partir d'un calcul d'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (2). En supposant que les coefficients métriques soient de l'ordre de un et en utilisant l'équation de continuité (3) pour déterminer l'ordre de grandeur de  $u_3$ , on obtient l'ordre de grandeur suivant pour la composante  $u_2$  de la vitesse:

$$u_2 \sim \frac{L U_1}{e_1 e_2} \left| \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2} \right|.$$

Autrement dit la composante  $u_2$  de la vitesse sera négligeable devant  $u_1$  si le coefficient géométrique  $(L/e_1 e_2) |\partial e_1 / \partial \xi_2|$  est petit devant un, c'est à dire si la variation transversale du coefficient métrique longitudinal est faible devant un.

Lorsque cette condition est vérifiée, on peut négliger la composante  $u_2$  devant la composante  $u_1$  chaque fois qu'elles interviennent dans des termes analogues.

Dans ce cas, les équations (1)-(4) deviennent:

$$\frac{u_1}{e_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} = f_1 + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_3^2} \quad (5)$$

$$\frac{u_1}{e_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} - \frac{u_1^2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_3^2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} (e_2 u_1) + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{u_1}{e_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + u_3 \frac{\partial T}{\partial \xi_3} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_3^2}. \quad (8)$$

Les simplifications précédentes ont eu pour effet de faire disparaître les dérivations de toutes les fonctions inconnues par rapport à la variable  $\xi_2$  qui n'est plus alors qu'un simple paramètre.

La résolution du système d'équations ci-dessus s'effectue donc de manière indépendante sur chacune des lignes de plus grande pente.

La structure des équations est celle d'un écoulement bidimensionnel avec cependant une équation supplémentaire pour la composante transversale  $u_2$ , mais celle-ci est indépendante des autres équations qui peuvent être résolues de la même manière que dans le cas bidimensionnel.

Ces propriétés entraînent la possibilité d'effectuer un changement de variables consistant à remplacer la

variable  $\xi_1$  par la longueur  $s$  de l'arc des lignes de plus grande pente:

$$ds = e_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1.$$

Les dérivées suivant la variable  $\xi_2$  étant négligées, le changement de variable précédent se réduit à la seule transformation de la dérivée suivant  $\xi_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{e_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

Les équations (5)–(8) s'écrivent alors:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} = f_1 + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_3^2} \quad (9)$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} - \frac{u_1^2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_3^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (e_2 u_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (e_2 u_3) = 0 \quad (11)$$

$$u_1 \frac{\partial T}{\partial s} + u_3 \frac{\partial T}{\partial \xi_3} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_3^2}. \quad (12)$$

### II.3. Application de la transformation de Mangler généralisée

Posons:

$$\bar{s} = \frac{1}{L^2} \int_0^s e_2^2(\tau, \xi_2) d\tau$$

$$\bar{n} = \frac{e_2}{L} (s, \xi_2) \xi_3$$

$$\bar{u}_1(\bar{s}, \bar{n}, \xi_2) = u_1(s, \xi_3, \xi_2)$$

$$\bar{u}_2(\bar{s}, \bar{n}, \xi_2) = u_2(s, \xi_3, \xi_2)$$

$$\bar{u}_3(\bar{s}, \bar{n}, \xi_2) = \frac{L}{e_2} \left[ u_3(s, \xi_3, \xi_2) + \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \xi_3 u_1 \right]$$

$$\bar{T}(\bar{s}, \bar{n}, \xi_2) = T(s, \xi_3, \xi_2)$$

$$\bar{f}_1(\bar{s}, \xi_2) = f_1(s, \xi_2).$$

Après transformation, on obtient les équations:

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{s}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{n}} = -\bar{f}_1 \beta \frac{(\bar{T} - T_\infty)}{L^2} e_2^2 + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{n}^2} \quad (13)$$

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{s}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{n}} - \frac{\bar{u}_1^2}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial \xi_2} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{n}^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (15)$$

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{s}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{n}^2} \quad (16)$$

avec les conditions aux limites:

$$\bar{n} = 0, \quad \bar{T} = T_p(s, \xi_2), \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$$

$$\bar{n} = \infty, \quad \bar{T} = T_\infty, \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0.$$

Les équations (13)–(16) peuvent alors être résolues de la même manière que celles de la couche limite de convection naturelle autour d'un cylindre horizontal dont la forme de la section droite est caractérisée par le terme  $f_1(e_2^2/L^2)$  et où  $\xi_2$  joue le rôle d'un paramètre supplémentaire.

Les méthodes exactes ou numériques peuvent être ensuite utilisées.

### III. CAS DU CYLINDRE CIRCULAIRE INCLINÉ

Nous avons voulu vérifier cette hypothèse de prévalence de l'écoulement selon les lignes de plus grande pente dans le cas particulier de la convection naturelle dans le champ de forces de la pesanteur autour d'un cylindre circulaire incliné à température pariétale constante. Nous avons, dans ce but, comparé l'angle formé en un point par une génératrice et une ligne de plus grande pente dont le développement dans le plan a pour expression analytique (Fig. 1):

$$z = tg \phi \ln \left[ tg \frac{x}{2} \right] \quad (17)$$

avec celui d'une génératrice et d'une ligne de courant.

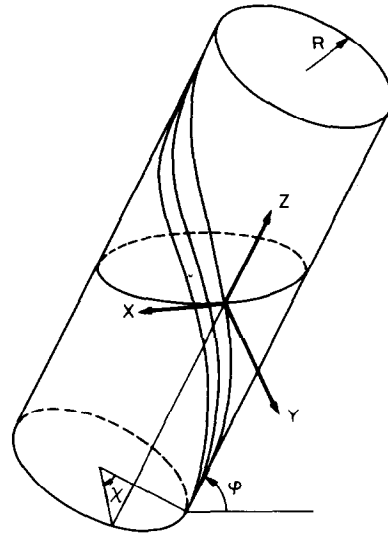


FIG. 1. Schéma montrant une vue du cylindre circulaire incliné, plusieurs lignes de plus grande pente et le système de coordonnées utilisé.

#### III.1.

Les équations de la couche limite de la convection naturelle établies en utilisant les particularités géométriques du cylindre incliné sont:

$$\psi'_y \psi''_{xy} - \psi'_x \psi''_{y^2} = \theta \sin x + \psi'''_{y^3} \quad (18)$$

$$\psi'_y w'_x - \psi'_x w'_y = \theta + w''_{y^2} \quad (19)$$

$$\psi'_y \theta'_x - \psi'_x \theta'_y = \frac{1}{Pr} \theta''_{y^2} \quad (20)$$

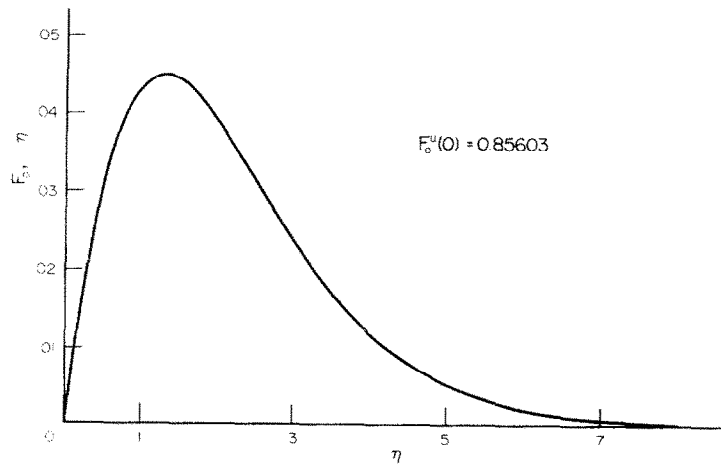
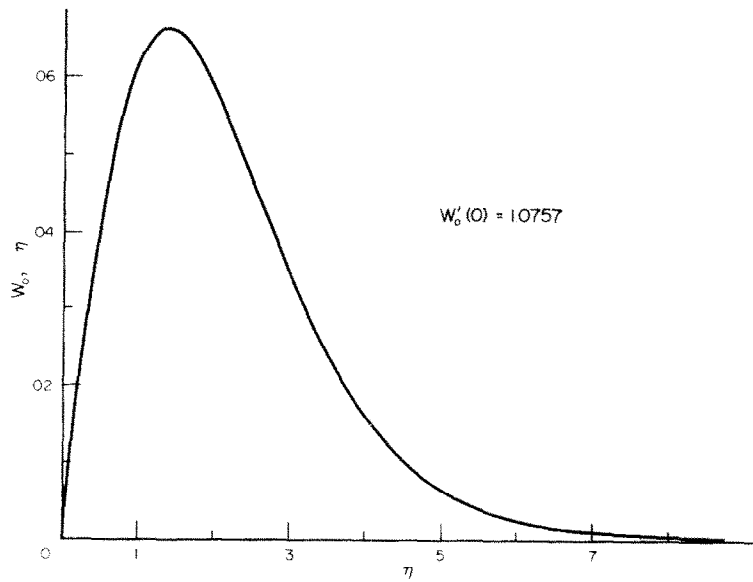
avec les conditions aux limites:

$$y = 0, \quad \psi'_y = \psi'_x = w = 0, \quad \theta = 1$$

$$y = \infty, \quad \psi'_y = \psi'_x = w = 0, \quad \theta = 0.$$

#### III.2.

L'intégration de ce système d'équations a été effectuée au moyen des transformations utilisées par Saville et Churchill pour la résolution des équations correspondant au problème bidimensionnel de la convection naturelle autour d'un cylindre horizontal [4]. Les solutions sont obtenues sous forme de développements en série d'une variable analogue à celle définie par Goertler pour les problèmes de convection forcée.

FIG. 2. Profil de la fonction de courant adimensionnelle le long de la normale au cylindre.  $Pr = 0.72$ .FIG. 3. Profil de vitesse adimensionnelle parallèle à l'axe du cylindre.  $Pr = 0.72$ .

Si l'on pose :

$$\xi = \int_0^x \sin^{-1/3} \zeta \, d\zeta \quad (21)$$

$$\eta = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} y \frac{\sin^{1/3} x}{\xi^{1/4}} \quad (22)$$

$$F(\xi, \eta) = \psi(x, y) \left(\frac{3}{4}\right)^{3/4} \xi^{-3/4} \quad (23)$$

$$\Theta(\xi, \eta) = \theta(x, y) \quad (24)$$

$$W(\xi, \eta) = w(x, y). \quad (25)$$

où :

$$K(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{\xi}{\sin x(\xi)} \frac{d[\sin x(\xi)]}{d\xi} \quad (26)$$

caractérise la géométrie étudiée.

Les conditions aux limites étant :

$$F(\xi, 0) = F'_\eta(\xi, 0) = F'_\eta(\xi, \infty) = 0$$

$$W(\xi, 0) = W(\xi, \infty) = 0$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1, \quad \Theta(\xi, \infty) = 0.$$

Les solutions sont obtenues sous la forme :

$$F(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\eta) \xi^{qj}$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(\eta) \xi^{qj}$$

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j(\eta) \xi^{qj}$$

$$K(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \xi^{qj}$$

Les équations (18)–(20) deviennent :

$$\frac{4}{3} \xi [F'_\eta F''_{\xi\eta} - F'_\xi F''_{\eta^2}] - F F''_{\eta^2} + \frac{4}{3} K(\xi) F'^2_\eta = \Theta + F'''_{\eta^2}$$

$$\frac{4}{3} \xi [F'_\eta W'_\xi - F'_\xi W'_\eta] - F W'_\eta = \Theta + W''_{\eta^2}$$

$$\frac{4}{3} \xi [F'_\eta \Theta'_\xi - F'_\xi \Theta'_\eta] - F \Theta'_\eta = \frac{1}{Pr} \Theta''_{\eta^2}$$

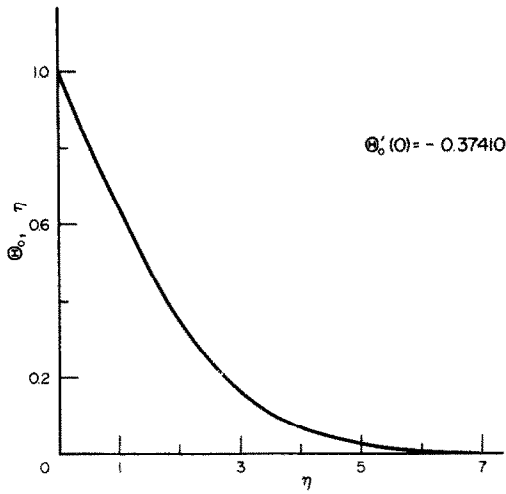


FIG. 4. Profil de température adimensionnelle le long de la normale au cylindre.  $Pr = 0.72$ .

$q$  est un nombre rationnel qui dans notre cas particulier est égal à  $3/2$ .

Compte tenu de l'excellente convergence des séries utilisant les variables de Görtler, il suffit de limiter l'intégration numérique au premier terme ( $j = 0$ ) des séries précédentes.

On obtient alors le système suivant:

$$\begin{aligned} F_0''' + F_0 F_0'' - F_0'^2 + \Theta_0 &= 0 \\ W_0''' + F_0 W_0'' + \Theta_0 &= 0 \\ T_0'' + Pr F_0 \Theta_0' &= 0 \end{aligned}$$

associé aux conditions limites:

$$\begin{aligned} F_0(0) = F_0'(0) = F_0'(\infty) = W_0(0) = W_0(\infty) &= 0 \\ \Theta_0(0) = 1, \quad \Theta_0(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Les profils de vitesse et de température sont représentés sur les Figs. 2-4. Les valeurs de  $F_0'(\eta)$  et  $\Theta_0(\eta)$  sont identiques aux résultats de Saville et Churchill [4].

### III.3. Comparaison des lignes de courant et de plus grande pente

Il est alors possible d'évaluer l'approximation effectuée avec l'hypothèse de prévalence de l'écoulement selon les lignes de plus grande pente. L'angle en un point d'une génératrice et d'une ligne de courant étant défini par:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{u} = \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} \left( \frac{4}{3} \right)^{1/2} \xi^{1/2} \sin^{1/3} x \frac{F_0'(\eta)}{W_0(\eta)}.$$

L'angle au même point d'une génératrice et d'une ligne de plus grande pente par:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dx}{dz} = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} \phi}.$$

La comparaison (Fig. 5) nous montre que l'écart ne devient notable que pour des valeurs de  $x$  supérieures à  $90^\circ$ . Il ne semble pas toutefois mettre en cause l'hypothèse de prévalence, car pour de telles valeurs de l'angle  $x$ , il faudrait prendre en compte des termes supplémentaires dans les séries utilisées.

### III.4. Résultats expérimentaux

Toujours dans le but de vérifier l'exactitude de l'hypothèse de prévalence, nous avons procédé à une visualisation des lignes de courant pariétales au moyen d'une méthode électrolytique (5-7), (Fig. 6). Par un procédé photographique par contact nous avons comparé directement les lignes de courant ainsi obtenues avec les lignes de plus grande pente dont nous connaissons l'expression analytique.

Quel que soit l'angle d'incidence du cylindre, pour des nombres de Grashof compris entre  $10^6$  et  $5 \times 10^6$  nous avons toujours constaté une parfaite superposition de celles-ci particulièrement au voisinage de la ligne de stagnation.

Ces résultats sont tout à fait semblables à ceux que Deluche [8] avait déjà mis en évidence de façon beaucoup moins précise toutefois à partir d'une visualisation dans l'eau par filets colorés.

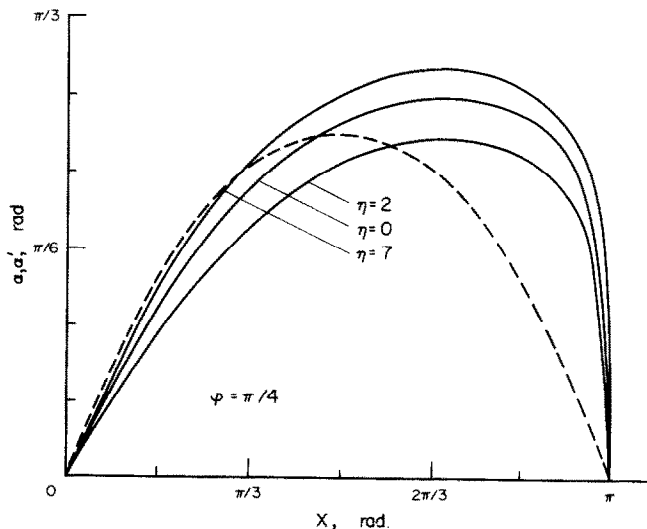


FIG. 5. Angle d'une génératrice et d'une ligne de courant  
— Angle d'une génératrice et d'une ligne de plus grande  
pente ----.  $\phi = \pi/4$ .



FIG. 6. Résultat de la visualisation des lignes de courant développées dans le plan:  $Gr = 10^6$ ;  $Pr = 5$ ;  $\phi = 60^\circ$ .

#### IV. CONCLUSION

Pour une large classe de surfaces, l'étude de la convection naturelle tridimensionnelle peut être ramenée en considérant les lignes de plus grande pente, à un problème où le calcul de la composante transversale de l'écoulement est découplé de la résolution des équations vérifiées par la composante principale de l'écoulement et par la température.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. S. B. Savage, Free convection flow about inclined cylinders, *AIAA J* **7**(8), 1628–1635 (1969).
2. W. E. Stewart, Asymptotic calculation of free convection in laminar three dimensional systems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 1013–1031 (1971).
3. A. Mager, *Theory of Laminar Flows*, Vol. 4, p. 288–294, Moore, Princeton (1964).
4. D. A. Saville et S. W. Churchill, Laminar free convection in boundary layers near horizontal cylinders and vertical axisymmetric bodies, *J. Fluid Mech.* **29**(2), 391–399 (1967).
5. D. Blay, Convection naturelle tridimensionnelle autour d'un cylindre incliné, Thèse de Spécialité, Université de Poitiers (1974).
6. M. Daguene et J. L. Peube, Sur une méthode chimique de visualisation des lignes de courant pariétales, *CRAS T.* **272**, 351–354, série A (1971).
7. J.-L. Tuhault, Méthode de visualisation électrochimique des lignes de courant pariétales, Thèse de spécialité, Université de Poitiers (1973).
8. C. Deluche, Convection naturelle tridimensionnelle, Thèse de spécialité, Université de Poitiers (1970).

#### THREE-DIMENSIONAL LAMINAR FREE CONVECTION FLOWS ABOUT SURFACES

**Abstract**—Within the three-dimensional laminar free convection, it is shown how the boundary-layer equations can be simplified to those of a two-dimensional problem by using the hypothesis of a flow prevailing according to the steepest ascent lines. This hypothesis is justified in the particular case of an isothermal, infinite, inclined, circular cylinder first from numerical solutions and then by a visualization of the wall streamlines.

#### DREIDIMENSIONALE LAMINARE NATÜRLICHE KONVEKTION ENTLANG OBERFLÄCHEN

**Zusammenfassung**—Für Probleme der dreidimensionalen natürlichen Konvektion wird gezeigt, daß sich mithilfe der Annahme, daß die Strömung vorwiegend in Richtung der größten Neigung erfolgt. Die Gleichungen der laminaren Grenzschicht auf ein zweidimensionales Problem vereinfachen lassen. Die Berechtigung dieser Annahme wird für den Spezialfall des geneigten, unendlichen, isothermen Kreiszylinders bestätigt, zuerst mittels numerischer Lösungen, dann durch Sichtbarmachen der Wandstromlinien.

ТРЕХМЕРНОЕ ЛАМИНАРНОЕ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ У  
ПОВЕРХНОСТЕЙ

**Аннотация** — В работе показано, как уравнения пограничного слоя для трёхмерной ламинарной свободной конвекции можно привести к уравнениям двумерной задачи, используя гипотезу о зависимости основного течения от степени крутизны контура. Гипотеза подтверждена на примере обтекания изотермического неограниченного наклонного круглого цилиндра сначала численным решением, а затем визуализацией линий тока на стенке цилиндра.